Facultad de Informática
Grado en Ingeniería Informática

Lógica

PARTE 2: LÓGICA DE PRIMER ORDEN

Tema 9: Cálculo Deductivo

Profesor: Javier Bajo
jbajo@fi.upm.es

Introducción a la lógica.

❑ Componentes de la lógica proposicional

Lenguaje de primer orden
Alfabeto
Sintaxis
Términos
Predicados
Sustituciones

+

Semántica
Interpretación
Dominio de interpretación
Funciones de interpretación
Fórmulas abiertas y cerradas
Satisfacción
Consecuencia lógica

Razonamiento Semántico
Argumentos
Modelos
Contramodelos

Cáculo Deductivo
Teoría lógica
Sistema formal
Reglas de deducción natural
Reglas derivadas

Metalógica
Validez
Completud
Decibilidad

Conclusiones

Índice de la Parte 2: Lógica de Primer Orden

1. **Introducción.**
2. **Reglas de deducción natural en LPO.**

Introducción.

- **¿Qué es el cálculo deductivo?**

- El cálculo lógico nos podrá decir que esquemas de inferencia son validos y cuáles no.

- En general hay dos manera de constituir los cálculos:

  - **Como un sistema de reglas**. Un sistema de reglas nos propone un razonamiento y mediante la aplicación de reglas hay que determinar si ese razonamiento propuesto es válido o no lo es.

  - **Como un sistema de leyes**. Este tipo de sistemas se ajusta mejor al modo en que razonamos normalmente, por eso se denominan sistemas de deducción natural. Un sistema de leyes consiste en encontrar todas las leyes lógicas que pueden derivarse de un conjunto reducido de leyes a los que denominamos **axiomas**, y que aceptamos como verdaderos por su auto-evidencia. Estos tipos de sistemas se denominan sistemas axiomáticos y en ellos todo lo que se deriva es válido, porque el sistema asegura la validez de la deducción.

Introducción.

❑ Motivación para construir un cálculo

- Dificultad para determinar **$\Gamma \models A$** por medios semánticos:
  - En el caso de la Lógica Proposicional, hay que explorar un número exponencialmente creciente de valoraciones
  - En el caso de la Lógica de Primer Orden, es imposible explorar todas las posibles asignaciones de significado (interpretaciones).

- Alternativa: determinar que **A** se deduce de **Γ** por medios sintácticos:

  $$\Gamma \vdash A$$

  - En lugar de razonar sobre el significado de las fórmulas (valoraciones o interpretaciones).
  - Razonar sobre la forma de las fórmulas.

Un cálculo deductivo para la LPO

- **Axiomas lógicos** de la teoría.
- **Reglas de inferencia**: 14 (las mismas 10 reglas básicas ya estudiadas más dos por cada cuantificador).
- Definición de **prueba**: una prueba de una fórmula en una teoría es una secuencia de fórmulas en la que cada elemento es:
  - **Premisa** o **supuesto temporal** de la teoría, o bien
  - **Resultado** de la aplicación de una regla de inferencia sobre fórmulas anteriores en la secuencia, y tal que
  - la última fórmula de la secuencia es la **fórmula probada**
- Definición de **teorema**: una fórmula B es teorema de una teoría *T[A1,...,An]* si *B* tiene una prueba en dicha teoría *(T[A1,...,An] ⊢ B)*.

Consideraciones previas

¿ $T[\exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y), \forall y Q(y) \rightarrow \forall z R(z)] \vdash \exists x P(x) \rightarrow \forall z R(z)$?

Con las reglas básicas que ya conocemos para lenguajes proposicionales podemos demostrar:

$T[p \rightarrow q, q \rightarrow r] \vdash p \rightarrow r$

1.	$p \rightarrow q$	premisa
2.	$q \rightarrow r$	premisa
3.	p	supuesto
4.	q	MP 1,3
5.	r	MP 2,4
6.	$p \rightarrow r$	I$\rightarrow$ 3,5

Sin añadir ninguna regla más también podríamos demostrar la fórmula anterior:

1.	$\exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y)$	premisa
2.	$\forall y Q(y) \rightarrow \forall z R(z)$	premisa
3.	$\exists x P(x)$	supuesto
4.	$\forall y Q(y)$	MP 1,3
5.	$\forall z R(z)$	MP 2,4
6.	$\exists x P(x) \rightarrow \forall z R(z)$	I$\rightarrow$ 3,5

Consideraciones previas

¿ $T[\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x(Q(x) \rightarrow R(x))] \vdash \forall x(P(x) \rightarrow R(x))$?

- El argumento es correcto, pero las reglas básicas que conocemos **son insuficientes** para poder demostrarlo

- Necesitamos **añadir nuevas reglas** para (cuando sea necesario):
  1. "abrir" las fórmulas cuantificadas (eliminar cuantificadores).
  2. aplicar las reglas de inferencia proposicionales.
  3. "cerrar" las fórmulas resultantes (introducir cuantificadores).

Reglas de deducción natural en LPO.

Reglas del cuantificador existencial

- *∃xA* es el resultado de sustituir apariciones del término *t* en la fórmula *A(t)* por una variable *x*. **Introducción de ∃**:

A(t)

∃xA

T[P(a) v Q(a)] ⊢ ∃x(P(x) v Q(x))

1.	P(a) v Q(a)	premisa
2.	∃x(P(x) v Q(x))	**$I_\exists$ 1**

- *A{x/a*}* resulta de sustituir todas las apariciones de *x* por *a* en *∃xA*, *a* una constante que no ha aparecido hasta entonces. **Eliminación de ∃**:

∃xA

A{x/a*}

T[∃x(P(x) ∧ Q(x))] ⊢ ∃xP(x)

1.	∃x(P(x) ∧ Q(x))	premisa
2.	P(a*) ∧ Q(a*)	**$E_\exists$ 1**
3.	P(a*)	E∧ 2
4.	∃xP(x)	$I_\exists$ 3

Reglas de deducción natural en LPO.

$T[\exists x(P(x) \wedge Q(x))] \vdash \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

1.	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	premisa
2.	$P(a^*) \wedge Q(a^*)$	$E_\exists$ 1
3.	$P(a^*)$	$E\wedge$ 2
4.	$\exists x P(x)$	$I_\exists$ 3
5.	$Q(a^*)$	$E\wedge$ 2
6.	$\exists x Q(x)$	$I_\exists$ 5
7.	$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$	$I\wedge$ 4,6

se introduce a como una constante nueva, sólo vigente mientras llegamos a deducir la fórmulas que nos interesan, que son $\exists x P(x)$ y $\exists x Q(x)$*

Reglas de deducción natural en LPO.

DEMOSTRACIÓN INCORRECTA

$T[\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)] \vdash \exists x(P(x) \wedge Q(x))$

1.	$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$	premisa
2.	$\exists x P(x)$	$E\wedge$ 1
3.	$P(a^*)$	$E_\exists$ 2
4.	$\exists x Q(x)$	$E\wedge$ 1
5.	$Q(a^*)$	$E_\exists$ 4
6.	$P(a^*) \wedge Q(a^*)$	$I\wedge$ 3,5
7.	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$I_\exists$ 6

Al usar otra vez a damos a entender que el elemento que cumple Q es el mismo que cumple P, y no tiene por qué ser así*

Contraejemplo de la deducción:
"hay números que son pares y hay números que son impares, pero no es cierto que haya números que son pares e impares simultáneamente"

Reglas de deducción natural en LPO.

Reglas del cuantificador universal

- *A{x/t}* es el resultado de sustituir todas las apariciones de *x* en *∀xA* por un término cualquiera *t*. **Eliminación de ∀** :

$$\frac{\forall x A}{A\{x/t\}}$$

$T[\forall x P(x)] \vdash P(f(b))$

1.	$\forall x P(x)$	Premisa
2.	$P(f(b))$	**$E_\forall$ 1**

$T[\forall x(P(x) \to Q(x)), P(a)] \vdash Q(a)$

1.	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	premisa
2.	$P(a)$	premisa
3.	$P(a) \to Q(a)$	**$E_\forall$ 1**
4.	$Q(a)$	MP 2,3

$T \vdash \forall x P(x) \to \exists x P(x)$

1.	$\forall x P(x)$	supuesto
2.	$P(a)$	**$E_\forall$ 1**
3.	$\exists x P(x)$	$I_\exists$ 2
4.	$\forall x P(x) \to \exists x P(x)$	$I\to$ 1,3

Reglas de deducción natural en LPO.

Reglas del cuantificador universal

- *x* aparece libre en *A(x)* y no aparece libre en ninguna premisa o supuesto previo no cancelado. **Introducción de ∀ :**

A(x)

∀xA

CONDICIONES:

- *A(x) no es ni una premisa ni un supuesto*
- *A(x) no incluye nombres temporales*
- *x no aparece libre en ninguna premisa ni supuesto previo no cancelado*

T[∀xP(x)] ⊢ ∀x(P(x) ∨ Q(x))

1.	∀xP(x)	premisa
2.	P(x)	$E_\forall$ 1
3.	P(x) ∨ Q(x)	I∨ 2
4.	∀x(P(x) ∨ Q(x))	**$I_\forall$ 3**

T[∀x(P(x) → Q(x)), ∀x(Q(x) → R(x))] ⊢ ∀x(P(x) → R(x))

1.	∀x(P(x) → Q(x))	premisa
2.	∀x(Q(x) → R(x))	premisa
3.	P(x) → Q(x)	$E_\forall$ 1
4.	Q(x) → R(x)	$E_\forall$ 2
5.	P(x)	supuesto
6.	Q(x)	MP 3,5
7.	R(x)	MP 4,6
8.	P(x) → R(x)	I→ 5,7
9.	∀x(P(x) → R(x))	**$I_\forall$ 8**

Reglas de deducción natural en LPO.

No se puede generalizar una fórmula que tiene constantes temporales

DEMOSTRACIÓN INCORRECTA

$T[\exists x P(x)] \vdash \forall x P(x)$

1.	$\exists x P(x)$	Premisa
2.	$P(a^*)$	$E_\forall$ 1
3.	$\forall x P(x)$	$I_\forall$ 2

Contraejemplo de la deducción: “hay números que son primos, pero eso no nos lleva a afirmar que todos los números lo son”

DEMOSTRACIÓN INCORRECTA

$T[\forall x \exists y M(y,x)] \vdash \exists y \forall x M(y,x)$

1.	$\forall x \exists y M(y,x)$	premisa
2.	$\exists y M(y,x)$	$E_\forall$ 1
3.	$M(a^*,x)$	$E_\exists$ 2
4.	$\forall x M(a^*,x)$	$I_\forall$ 3
5.	$\exists y \forall x M(y,x)$	$I_\exists$ 4

Contraejemplo de la deducción: “todo el mundo tiene madre, pero no hay nadie que sea la madre de todo el mundo”

Estrategias Deductivas.

Fórmula	Como Premisa	Como Conclusión
P ∧ Q	Deduce P y deduce Q	Demuestra P y Q por separado
P ∨ Q	Demuestra P → ___, Q → ___, y deduce ___	Demuestra o P o Q
P → Q	Demuestra P, y deduce Q	Supón P y demuestra Q
¬P	Si ¬P es ¬¬Q, deduce Q	Supón P y demuestra ___ ∧ ¬___
P ↔ Q	Deduce P → Q y Q → P	Demuestra P → Q y Q → P
∀x P(x)	Deduce P(_)	Demuestra P(x) para la variable x
∃x P(x)	Deduce P(a*) para algún nombre temporal nuevo	Demuestra P(_)

Ejemplo.

Ejemplo 1: Consideramos las siguientes afimaciones: *La Tierra orbita en torno al Sol. La Luna orbita en torno a la Tierra. Todo cuerpo que orbita en torno al Sol es un planeta. Son satélites los cuerpos que orbitan en torno a planetas. Luego la Tierra es un planeta y la Luna un satélite.*

- $T[\ O(a,b),\ O(c,a),\ \forall x(O(x,b) \rightarrow P(x)),\ \forall x \forall y(O(x,y) \wedge P(y) \rightarrow S(x))\ ] \vdash P(a) \wedge S(c)$

1. $O(a,b)$	Premisa
2. $O(c,a)$	Premisa
3. $\forall x(O(x,b) \rightarrow P(x))$	Premisa
4. $\forall x \forall y(O(x,y) \wedge P(y) \rightarrow S(x))$	Premisa
5. $O(a,b) \rightarrow P(a)$	$E_{\forall 4}$
6. $P(a)$	$E_{\rightarrow 6,1}$
7. $\forall y(O(c,y) \wedge P(y) \rightarrow S(c))$	$E_{\forall 5}$
8. $O(c,a) \wedge P(a) \rightarrow S(c))$	$E_{\forall 8}$
9. $O(c,a) \wedge P(a)$	$I_{\wedge 2,7}$
10. $S(c)$	$E_{\rightarrow 9,10}$
11. $P(a) \wedge S(c)$	$I_{\wedge 7,11}$

Ejemplo.

Ejemplo 2: Consideramos las siguientes afimaciones: *Todo elemento químico es oxidante o reductor. El carbono es un elemento químico no oxidante. Luego el carbono es reductor.*

- $T[\forall x(E(x) \rightarrow O(x) \vee R(x)), E(a) \wedge \neg O(a)\ ] \vdash R(a)$

1. $\forall x(E(x) \rightarrow O(x) \vee R(x))$	Premisa
2. $E(a) \wedge \neg O(a)$	Premisa
3. $E(a)$	$E_{\wedge 2}$
4. $E(a) \rightarrow O(a) \vee R(a))$	$E_{\forall 1}$
5. $O(a) \vee R(a)$	$E_{\rightarrow 4,3}$
6. $\neg O(a)$	$E_{\wedge 2}$
7. $R(a)$	$E_{\vee 5,6}$

Ejercicios

Demostrar por medio de deducción natural:

1. $\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), P(a)\} \vdash Q(a)$
2. $\{\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)), P(a)\} \vdash Q(a)$
3. $\{\forall x(P(x) \rightarrow R(x)), \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))\} \vdash \exists x(R(x) \wedge \neg Q(x))$